ORSAY
n° d'ordre : 2994

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PAR

M. SAINT RAYMOND Xavier

SUJET : L'UNICITE POUR DES PROBLEMES DE CAUCHY CARACTERISTIQUES EN CERTAINS POINTS

soutenue le 06 MAI 1981 devant la Commission d'examen

MM. ALINHAC Président

BONY

ZUILY

TREVES

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41547321_0023

Code matière AMS (1981) 35 A 07

35 G 10

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

ORSAY
n° d'ordre : 2994

UNIVERSITE DE PARIS-SUD

CENTRE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le TITRE de DOCTEUR 3° CYCLE

SPECIALITE : MATHEMATIQUES

PAR

M. SAINT RAYMOND Xavier

SUJET : L'UNICITE POUR DES PROBLEMES DE CAUCHY CARACTERISTIQUES EN CERTAINS POINTS

soutenue le 06 MAI 1981 devant la Commission d'examen

MM. ALINHAC Président

BONY

ZUILY

TREVES

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

T H E S E

présentée

A L'UNIVERSITE PARIS XI

pour l'obtention du Doctorat de 3ème cycle

SPECIALITE : Equations aux Dérivées Partielles

par

XAVIER SAINT RAYMOND

Sujet de la Thèse :

L'UNICITE POUR DES PROBLEMES DE CAUCHY CARACTERISTIQUES EN CERTAINS POINTS

Cette thèse a été préparée à l'UER de Mathématiques de PARIS XI (Orsay) sous la direction de M. le Professeur Serge ALINHAC.

Je tiens à remercier tout particulièrement M. le Professeur François TREVES qui m'a fait l'honneur de bien vouloir s'intéresser à mon travail et participer au jury pendant son court séjour à PARIS.

Je remercie profondément le Professeur Serge ALINHAC qui m'a constamment guidé au cours de ce travail, qui a eu la patience de lire et de relire ces notes et en a amélioré la clarté par ses suggestions et qui a bien voulu présider le jury.

Je remercie également MM. les Professeurs Jean-Pierre BONY et Claude ZUILY qui ont bien voulu compléter ce jury, et avec eux toute l'équipe d'équations aux dérivées partielles d'Orsay pour l'aide plus ou moins directe qu'ils m'ont apportée.

Enfin, je tiens à mentionner ici Madame Antoinette BARDOT qui a bien voulu se charger de la dactylographie de cette thèse pendant une période bien chargée.

Xavier SAINT RAYMOND

" Ecce enim tu , domine , rex meus
et deus meus , tibi serviat quidquid
utile puer didici, tibi serviat quod
loquor et scribo et lego et numero ,
quoniam cum vana discerem , tu
disciplinam dabas mihi et in eis vanis
peccata delectationum mearum dimisisti
mihi ".

August. Hipp., Conf. I, XV, 24.

P L A N

I - INTRODUCTION

II - NOTATIONS ET CHOIX DES COORDONNEES

III - CONSTRUCTION D'UN CONTRE-EXEMPLE

IV - POUR LES AUTRES CONTRE-EXEMPLES

V - POUR L'UNICITE

VI - OPERATEURS D'ORDRE M > 2

VII - BIBLIOGRAPHIE

I - INTRODUCTION

I.1 - Contexte de la présente étude

L'unicité pour le problème de Cauchy C^∞ a fait l'objet d'un bon nombre de travaux depuis une vingtaine d'années, à la suite de Calderon [5] et Hörmander (cf. bibliographie de [9]) pour des théorèmes d'unicité, et de Cohen [7] et de Pliš [11] pour des contre-exemples (pour une vue d'ensemble, voir Hörmander [10]).

Le problème de Cauchy caractéristique en tout point de la surface portant les données de Cauchy a été étudié par Alinhac et Baouendi [3] (pour des opérateurs du type de Fuchs), notamment pour ses rapports avec la forte unicité.

Pour ce qui est du problème de Cauchy caractéristique en certains points seulement, nous ne connaissons qu'une référence, Trèves [13], qui traite un exemple. Notre travail porte sur les cas les plus courants du problème de Cauchy caractéristique pour des opérateurs à coefficients C^∞ du deuxième ordre et à symbole principal réel ; nous tachons d'y mettre en lumière le rôle des bicaractéristiques dans la "propagation des zéros" ; à la différence de l'exemple de Trèves qui reste en dehors de nos cas génériques, nous verrons que certains résultats peuvent être obtenus sans condition sur les termes d'ordre inférieur. Notons enfin que ce problème n'est pas sans rapport avec la question de la forte unicité, comme l'a signalé Alinhac [1].

Ajoutons à tout ceci que dans le cas analytique, nous disposons de résultats plus nombreux, tant dans les cas totalement caractéristiques que dans les cas caractéristiques en certains points seulement. Pour l'instant, nous donnons seulement des références : Hörmander [9] chapitre 5 et Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4] ; pour un bref aperçu de ces résultats et de leur rapport avec les nôtres, voir I.3.e.

I.2 - Enoncé du théorème

Soient Y une sous-variété de codimension un de l'espace $X = \mathbb{R}^N$, $0 \in Y$ un point de cette sous-variété et P un opérateur différentiel linéaire du deuxième ordre à coefficients C^∞ dont le symbole principal p est réel ; nous supposerons de plus que Y est caractéristique pour P en 0. Nous étudions l'unicité des solutions au problème de Cauchy C^∞ correspondant à cette situation, c'est-à-dire l'existence d'une fonction

u C^∞ non triviale, solution au voisinage de 0 du problème :

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ u \text{ est plate sur } Y \end{cases}$$

(Nous dirons qu'une fonction est "plate sur Y" si toutes ses dérivées sont nulles sur Y).

Localement, il existe une fonction C^∞ t telle que grad t(0) ≠ 0 et que Y ait pour équation t = 0 ; le point (0;grad t(0)) de T^*X sera alors noté ρ_0.

Théorème 1 : Supposons que :

(H1) $\quad p(\rho_0) = \{p,t\}\ (\rho_0) = 0$

mais que

(H2) $\quad \{p,\{p,t\}\}\ (\rho_0) \neq 0$.

Nous distinguons alors les deux demi-espaces fermés de frontière Y par :

$$\begin{cases} Y_+ = \{t \text{ est du signe de } \{p,\{p,t\}\}\ (\rho_0)\} \\ Y_- = \{t \text{ est du signe opposé à celui de } \{p,\{p,t\}\}\ (\rho_0)\} \end{cases}$$

Alors il existe un voisinage Ω *de 0, et des fonctions* α *et u* C^∞ *dans* Ω *et plates sur Y tels que :*

$$\begin{cases} 0 \in \text{supp } u \subset Y_+ \quad \text{et} \\ (P+\alpha)u = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

En outre

1) Si (en plus de (H1) et de (H2))

$$(H3) \quad \begin{cases} \exists \rho_1 \in T^*_0X \setminus 0 \text{ tel que } p(\rho_1) = \{p,t\}\ (\rho_1) = 0 \\ \text{et que } \{p,\{p,t\}\}\ (\rho_1) \cdot \{p,\{p,t\}\}\ (\rho_0) < 0 \end{cases}$$

alors il existe un voisinage Ω *de* 0, *un opérateur* Q *du premier ordre à coefficients* C^∞ *et une fonction* u C^∞ *dans* Ω *tels que :*

$$\begin{cases} 0 \in \text{supp } u \subset Y_- \quad \text{et} \\ (P+Q)u = 0 \quad \text{dans } \Omega \, . \end{cases}$$

2) *Si au contraire (mais toujours en plus de (H1) et de (H2))*

$$(H4) \quad \begin{cases} \forall \rho \in T^*_0 X \setminus 0 \, , \; p(\rho) = \{p,t\}(\rho) = 0 \quad \text{entraîne que} \\ \{p,\{p,t\}\}(\rho) \, . \, \{p,\{p,t\}\}(\rho_0) > 0 \end{cases}$$

alors il existe deux voisinages Ω_1 *et* Ω_2 *de* 0 *tels que*

$$\forall u \in C^\infty(\Omega_1) \, , \quad \begin{cases} \text{supp } u \subset Y_- \quad \text{et} \\ Pu = 0 \text{ dans } \Omega_1 \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0 \text{ dans } \Omega_2$$

I.3 - Commentaires sur le théorème

a - L'hypothèse (H1). Elle signifie tout simplement que Y est caractéristique pour P en 0 ($p(\rho_0) = 0 \Rightarrow \{p,t\}(\rho_0) = 0$).

b - L'hypothèse (H2). Elle signifie

• que la variété caractéristique de P coupe transversalement le fibré conormal à Y en ρ_0 (la variété Y est alors, au voisinage de 0, caractéristique pour P le long d'une sous-variété Z de Y de codimension un).

• que la bicaractéristique issue de ρ_0 est tangente à Y en 0 (ou encore que "ρ_0 ne donne pas lieu à un cusp", expression par laquelle nous entendons que $H_p(\rho_0)$ ne se projette pas en le champ nul sur la base, comme l'aurait permis l'hypothèse (H1) seule), et transverse à Z en 0 ; par la suite, nous l'appellerons la bicaractéristique conormale.

Nous donnerons ci-dessous une autre interprétation de (H2).

c - Les hypothèses (H3) et (H4). Les points $\rho \in T_0^*X$ tels que $p(\rho)=\{p,t\}(\rho)=0$ sont les points qui donnent naissance aux bicaractéristiques tangentes à Y en 0 (à moins qu'elles ne présentent des "cusps", mais nous verrons en IV.1 comment on peut tourner cette difficulté). Nous dirons qu'une telle bicaractéristique est "convexe" si $\{p,\{p,t\}\}(\rho) \neq 0$; dans ce cas, elle est localement contenue dans $\{t \geqslant 0\}$ ou $\{t \leqslant 0\}$ selon le signe de $\{p,\{p,t\}\}(\rho)$.

En utilisant ce vocalubaire, nous pouvons reformuler le théorème 1 de la façon suivante :

Théorème 1' : Si Y est caractéristique pour P en 0 et si la bicaractéristique co-normale est "convexe", localement située du côté Y_+ de Y, alors P ne possède pas la propriété d'unicité du côté Y_+, à une perturbation plate α près. De plus :

1) S'il existe une autre bicaractéristique "convexe", mais localement situé de l'autre côté Y_- de Y, P ne possède pas non plus la propriété d'unicité du côté Y_-, à une perturbation du premier ordre Q près.

2) Au contraire sous l'hypothèse (H4) (qui signifie, modulo le problème des "cusps", que toutes les bicaractéristiques tangentes à Y en 0 sont "convexes" et localement situées du même côté Y_+ de Y), P possède la propriété d'unicité du côté Y_-.

Remarque : Ce dernier cas étant indépendant des termes d'ordre inférieur, nous pouvons le remplacer par :

"2) Sous l'hypothèse (H4), P+Q possède la propriété d'unicité du côté Y_- pour toute perturbation Q du premier ordre", ce qui donne plus de symétries à nos conclusions.

d - Un autre aspect géométrique. Notons $\mathbb{P}_1 = \mathbb{P}(T_0^*X) \cap \{\{p,t\} = 0\}$ l'espace projectif (de dimension N-1) où la trace Ch_1 de la variété caractéristique de P est une quadrique contenant tous les points donnant naissance aux bicaractéristiques tangentes à Y en 0 (mais aussi aux "cusps" !). Nous pouvons aussi introduire $\mathbb{P}_2$ (de dimension N-2) l'hyperplan de $\mathbb{P}_1$ tel que $Ch_2 = \mathbb{P}_2 \cap Ch_1$ contienne toutes les bicaractéristiques tangentes à Z en 0. Enfin l'équation $\{p,\{p,t\}\} = 0$ définit dans $\mathbb{P}_1$ (resp. dans $\mathbb{P}_2$) une autre quadrique K_1 (resp. K_2).

K_1 partageant $\mathbb{P}_1$ en deux domaines ouverts (les domaines où $\{p,\{p,t\}\} > 0$

et où $\{p,\{p,t\}\} < 0$), l'hypothèse alternante (H3)/(H4) peut encore être exprimée dans les termes suivants :

(H3) : Ch_1 possède des points de part et d'autre de K_1.

(H4) : Ch_1 possède tous ses points d'un seul côté de K_1.

Enfin, le lecteur pourra remarquer au cours de la démonstration qu'il suffit pour conclure de voir comment les choses se passent dans $\mathbb{P}_2$, à condition toutefois d'avoir noté le signe de $\{p,\{p,t\}\}$ (ρ_0) (cf. II.2).

e - Un aperçu des résultats pour le problème analytique. Pour le problème non caractéristique, nous avons bien entendu le théorème d'unicité de Holmgren ; mais il y a aussi des résultats pour le problème caractéristique.

Lorsque Y est totalement caractéristique, mais simplement caractéristique, il n'y a pas unicité (cf. Hörmander [9], théorème 5.2.1, ou Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4], corollaire 1.3).

Pour le problème caractéristique en certains points seulement, qui nous intéresse plus particulièrement, nous savons que sous les hypothèses (H1) et (H2) de notre théorème 1, il y a toujours unicité du côté $t \leqslant 0$ (cf. Hörmander [9], théorème 5.3.2), mais jamais du côté $t \geqslant 0$ (cf. Baouendi, Trèves et Zachmanoglou [4], théorème 1).

Cela montre en particulier que pour obtenir un résultat de non-unicité au 1) du théorème 1, nous étions obligés de perturber l'opérateur P.

I.4 - Plan de la démonstration du théorème 1, et méthodes utilisées

Le reste de ces notes est consacré à la démonstration du théorème 1. Pour cela, nous suivrons le plan suivant.

Au paragraphe III, nous démontrons les conclusions du théorème 1 concernant Y_+ (première partie du théorème) ; nous utilisons pour cela une méthode standard en deux temps : après avoir construit une solution formelle par les méthodes de l'optique géométrique (cf. Courant-Hilbert [8]), nous modifions cette solution formelle afin d'obtenir une convergence asymptotique.

Au paragraphe IV, nous établissons les conséquences de l'hypothèse (H3) (1) du théorème 1) ; nous empruntons en fait la construction de nos contre-exemples à Hörmander (cf. [9], théorème 8.9.4), qui repose elle-même sur la construction de Cohen [7] ; notre travail a consisté ici à tracer la route qui mène de notre hypothèse (H3) au décor géométrique du théorème utilisé.

Au paragraphe V, nous nous occupons de la propriété d'unicité (2) du théorème 1). Pour la démontrer, nous avons eu recours à la seule méthode un peu générale que nous connaissions (le théorème d'Holmgren étant inutilisable dans les cas non-analytiques) : les inégalités dites de Carleman, d'abord introduites par Carleman [6] (voir aussi Trèves [12]), mais que nous utiliserons à travers le critère de pseudo-convexité de Hörmander (cf. [9], théorème 8.9.1). Nous montrons en fait que dans le cadre où nous nous trouvons, l'hypothèse pseudo-convexe (H4) entraîne la pseudo-convexité forte (et par là, l'unicité).

II - NOTATIONS ET CHOIX DES COORDONNEES

II.1 - Réduction de l'opérateur

Proposition 1 : Sous les hypothèses (H1) et (H2) (cf. I.2), il existe des coordonnées $(t,x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ *(avec* $n = N-2$*) telles que* $Y = \{t=0\}$, $0 = (0,0,0)$ *et :*

$$(2.1)\quad \begin{cases} P(t,x,y,D_t,D_x,D_y) = x\,D_t^2 + 2aD_x\,D_t + \sum_{i=1}^{n} 2a_i\,D_t\,Dy_i + \\ \quad + b\,D_x^2 + \sum_{i=1}^{n} 2\,b_i\,D_x\,D_{y_i} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}\,D_{y_i}\,D_{y_j} + \\ \quad + d\,D_t + e\,D_x + \sum_{i=1}^{n} g_i\,D_{y_i} + h \end{cases}$$

où a, $(a_i)_{i=1,\dots,n}$, b, $(b_i)_{i=1,\dots,n}$ *et* $(c_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,n}}$ *sont des fonctions* C^∞ *de* (t,x,y) *à valeurs réelles, et* d, e, $(g_i)_{i=1,\dots,n}$ *et* h *sont des fonctions* C^∞ *de* (t,x,y) *à valeurs complexes ;* $a(0,0,0) = A > 0$

et vérifiant de plus :

$$(2.2)\qquad \forall i = 1,\dots,n\ ,\ a_i(0,0,y) \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x}(0,0,y) \equiv b_i(0,0,y) \equiv 0\ .$$

Remarques : (i) dans la proposition qui précède, les notations D_t, D_x et D_{y_i} désignent respectivement $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y_i}$; nous utiliserons encore par la suite des notations classiques comme $D_y = (\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n})$, $D = (D_t,D_x,D_y)$ ou $D_y^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial y_1^{\alpha_1}\cdots\partial y_n^{\alpha_n}}$. (ii) Pour les variables cotangentes, nous utiliserons les lettres τ, ξ et η avec $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_n)$.

Démonstration de la proposition 1 : Choisissons t comme en I.2 et complétons notre système de coordonnées par des variables $z_1,\dots,z_{N-1}$ s'annulant en 0 et paramétrant Y au voisinage de 0 ; notant x le coefficient de τ^2 dans p, nous pouvons écrire :

$$p(t,z;\tau,\zeta) = x(t,z)\tau^2 + \sum_{j=1}^{N-1} 2\alpha_j(t,z)\tau\zeta_j + p_1(t,z;\zeta)$$

L'hypothèse (H1) nous indique que $x(0,0) = 0$, et l'hypothèse (H2) que

$$\sum_{i=1}^{N-1} \alpha_i(0,0) \frac{\partial x}{\partial z_i}(0,0) \neq 0 .$$

De cette propriété, nous tirons que :

$$\text{grad}_z\, x(0,0) \neq 0$$

Ceci montre que x peut être pris comme variable indépendante de t ; partant maintenant de (t,x), nous complétons notre système de coordonnées par des variables $y_1,\ldots,y_n$ (avec n = N-2) s'annulant en 0 de telle façon que x, $y_1,\ldots,y_n$ paramètrent Y au voisinage de 0. Notre symbole p s'écrit maintenant :

$$p = x\tau^2 + 2a(t,x,y)\tau\xi + \sum_{i=1}^{n} 2a_i(t,x,y)\tau\eta_i + p_2(t,x,y;\xi,\eta)$$

Avec ces notations, (H2) devient :

$$a(0,0,0) \neq 0$$

Ce nombre a(0,0,0) (que nous noterons A) peut même être supposé strictement positif quitte à changer t en -t ; nous obtenons ainsi au voisinage de l'origine un opérateur P de la forme (2.1).

Pour terminer la démonstration de la proposition 1, nous montrerons que l'on peut choisir les variables y_i de telle façon que (2.2) soit vérifiée ; pour cela, nous commençons par choisir les y_i de façon quelconque, puis nous rectifions notre choix successivement par les deux lemmes suivants.

Lemme 1 : Soit P un opérateur de la forme (2.1) ; alors il existe un changement de variables ne modifiant pas t tel que P soit encore de la forme (2.1) et vérifie de plus la condition :

$$\forall i = 1,\ldots,n , \qquad a_i(0,0,y) \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x}(0,0,y) \equiv 0 .$$

Lemme 2 : Soit P un opérateur de la forme (2.1) vérifiant de plus la condition :

$$\forall i = 1,\dots,n\ , \qquad a_i(0,0,y) \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x}(0,0,y) \equiv 0\ ;$$

alors il existe un changement de variables ne modifiant pas t tel que P soit encore de la forme (2.1) et vérifie de plus (2.2).

Démonstration du lemme 1 : Nous proposons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} T = t,\ X = x \text{ et } Y_i = y_i - \displaystyle\int_0^x \frac{\tilde{a}_i(s,y)}{\tilde{a}(s,y)}\,ds \text{ où nous avons noté } \tilde{a}(x,y) = a(0,x,y) \\ \text{et } \tilde{a}_i(x,y) = a_i(0,x,y) - \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_j(0,x,y) \int_0^x \frac{a_i(0,s,y)}{\tilde{a}(s,y)}\,ds \end{cases}$$

Nous pouvons alors calculer que :

$$D_t = D_T,\ D_x = D_X - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{a}} D_{Y_i} \quad \text{et} \quad D_{y_i} = D_{Y_i} - \sum_{j=1}^{n} \int_0^x \left(\frac{\tilde{a}_j(s,y)}{\tilde{a}(s,y)}\right)'_{y_i} ds\ D_{Y_j}$$

Comme nous ne nous intéressons ici qu'aux termes en D_T^2, $D_X D_T$ et $D_{Y_i} D_T$, les calculs qui suivent sont effectués modulo tous les autres termes.

$$P = x D_t^2 + 2a D_x D_t + \sum_{i=1}^{n} 2a_i D_t D_{y_i} =$$

$$= x D_T^2 + 2a D_X D_T - \sum_{i=1}^{n} \frac{2a \tilde{a}_i}{\tilde{a}} D_T D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} 2a_i \Big(D_{Y_i} - \sum_{j=0}^{n} \int_0^x \Big(\frac{\tilde{a}_j}{\tilde{a}}\Big)'_{y_i} ds\ D_{Y_j}\Big) D_T$$

d'où

$$P = X D_T^2 + 2a D_X D_T + \sum_{i=1}^{n} 2a_i - \frac{2a\, a_i(0,x,y)}{\tilde{a}} D_T D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1 \\ j=1}}^{n} \left[\frac{2a\, a_j(0,x,y)}{\tilde{a}} \int_0^x \left(\frac{a_i(0,s,y)}{\tilde{a}(s,y)}\right)'_{y_j} ds - 2a_j \int_0^x \left(\frac{a_i(0,s,y)}{\tilde{a}(s,y)}\right)'_{y_j} ds\right] D_T D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\j=1\\k=1}}^{n} \left[2a_i \int_o^x \left(\frac{a_k(0,s,y)}{\tilde{a}(s,y)} \int_o^s \left(\frac{a_j(0,u,y)}{\tilde{a}(u,y)} \right)'_{y_k} du \right)'_{y_i} ds \right] D_T \, D_{Y_i} \quad .$$

Les termes en D_T^2 et $D_T \, D_X$ sont ceux que nous attendions ; les deux premiers termes en $D_T \, D_{Y_i}$ sont identiquement nuls sur $T = 0$ et sont donc de la forme $a_i \, D_T \, D_{Y_i}$ avec $a_i(0,0,Y) \equiv \frac{\partial a_i}{\partial X}(0,0,Y) \equiv 0$; le dernier terme est nul dès que $X = 0$ ainsi que sa dérivée par rapport à x ; mais $D_x = D_X - \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{a}} D_{Y_i}$ et, sur $X = 0$, $D_{y_i} = D_{Y_i}$ d'où $D_X = D_x + \sum_{i=1}^{n} \frac{\tilde{a}_i}{\tilde{a}} D_{y_i}$, et finalement le dernier terme est nul sur $X = 0$ ainsi que sa dérivée par rapport à X. Ceci termine la démonstration du lemme 1.

Démonstration du lemme 2 : Nous proposons le changement de variables suivant :

$$\begin{cases} T = t, \; X = x, \; Y_i = y_i - \displaystyle\int_o^t \frac{b_i^*(s,y)}{a^*(s,y)} ds + \int_o^x \frac{s \, \tilde{b}_i^*(y)}{\tilde{a}(s,y)\tilde{a}^*(y)} ds \\ \\ \text{où nous avons posé : } \tilde{a}(x,y) = a(0,x,y) \; , \\ a^*(t,y) = a(t,0,y), \; \tilde{a}^*(y) = a(0,0,y) \; , \\ b_i^*(t,y) = b_i(t,0,y) \text{ et } \tilde{b}_i^*(y) = b_i(0,0,y) \; . \end{cases}$$

Nous pouvons alors calculer que :

$$D_t = D_T - \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^*}{a^*} D_{Y_i} \quad , \quad D_X = D_X + \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{\tilde{a}(x,y)} \frac{\tilde{b}_i^*(y)}{\tilde{a}^*(y)} D_{Y_i} \quad \text{et}$$

$$D_{y_i} = D_{Y_i} + \sum_{j=1}^{n} \left[\int_o^x \left(\frac{s}{\tilde{a}(s,y)} \frac{\tilde{b}_j^*(y)}{\tilde{a}^*(y)} \right)'_{y_i} ds - \int_o^t \left(\frac{b_j^*(s,y)}{a^*(s,y)} \right)'_{y_i} ds \right] D_{Y_j}$$

Comme nous ne nous intéressons ici qu'aux termes en D_T^2, $D_X \, D_T$, $D_{Y_i} \, D_T$ et $D_{Y_i} \, D_X$, les calculs qui suivent sont effectués modulo tous les autres termes :

$$P = x\,D_t^2 + 2a\,D_x\,D_t + \sum_{i=1}^{n} 2a_i\,D_{y_i}\,D_t + b\,D_x^2 + \sum_{i=1}^{n} 2b_i\,D_{y_i}\,D_x =$$

$$= X\,D_T^2 - 2X \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^*}{a^*}\,D_{Y_i}\,D_T + 2a\,D_X\,D_T - 2a \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^*}{a^*}\,D_X\,D_{Y_i} +$$

$$+ 2a \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{\tilde{a}} \frac{\tilde{b}_i^*}{\tilde{a}^*}\,D_{Y_i}\,D_T + \sum_{i=1}^{n} 2a_i\,D_T\,D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} 2a_i \left[\int_0^x \left(\frac{s}{\tilde{a}(s,y)} \frac{\tilde{b}_j^*(y)}{\tilde{a}^*(y)} \right)'_{y_i} ds - \int_0^t \left(\frac{b_j^*(s,y)}{a^*(s,y)} \right)'_{y_i} ds \right] D_{Y_j}\,D_T +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \frac{2bx}{\tilde{a}(x,y)} \frac{\tilde{b}_j^*(y)}{\tilde{a}^*(y)}\,D_X\,D_{Y_i} + \sum_{i=1}^{n} 2b_i\,D_X\,D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} 2b_i \left[\int_0^x \left(\frac{s}{\tilde{a}(s,y)} \frac{\tilde{b}_j^*(y)}{\tilde{a}^*(y)} \right)'_{y_i} ds - \int_0^t \left(\frac{b_j^*(s,y)}{a^*(s,y)} \right)'_{y_i} ds \right] D_{Y_j}\,D_X$$

d'où

$$P = X\,D_T^2 + 2a\,D_X\,D_T + \sum_{i=1}^{n} \left(2b_i - \frac{2ab_i^*}{a^*} \right) D_X\,D_{Y_i} + 2b \sum_{i=1}^{n} \frac{x}{\tilde{a}(x,y)} \frac{\tilde{b}_i^*(y)}{\tilde{a}^*(y)}\,D_X\,D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{\substack{i=1\\j=1}}^{n} 2b_i \left[\int_0^x \left(\frac{s}{\tilde{a}(s,y)} \frac{\tilde{b}_j^*(y)}{\tilde{a}^*(y)} \right)'_{y_i} ds - \int_0^t \left(\frac{b_j^*(s,y)}{a^*(s,y)} \right)'_{y_i} ds \right] D_X\,D_{Y_i} + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{2ax\tilde{b}_i^*}{\tilde{a}\,\tilde{a}^*} - \frac{2xb_i^*}{a^*} \right) D_T\,D_{Y_i} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} \left(2a_i + \sum_{j=1}^{n} 2a_j \left[\int_0^x \left(\frac{s}{\tilde{a}\ (s,y)} \frac{\tilde{b}_j^*(y)}{\tilde{a}^*(y)} \right)'_{y_i} ds - \int_0^t \left(\frac{b_j^*(s,y)}{a^*(s,y)} \right)'_{y_i} ds \right] \right) D_{Y_i}\,D_T\ .$$

Les termes en D_T^2 et $D_X\,D_T$ sont ceux que nous attendions ; les termes en $D_X\,D_{Y_i}$ sont tous nuls sur $T = X = 0$; le premier terme en $D_T\,D_{Y_i}$, étant identiquement nul sur $T = 0$, est de la forme $a_i\,D_T\,D_{Y_i}$ avec $a_i(0,0,Y) \equiv \frac{\partial a_i}{\partial X}(0,0,Y) \equiv 0$; enfin, le dernier terme est une combinaison linéaire des coefficients a_i dont l'hypothèse (du lemme 2) dit

qu'il vérifient $a_i(0,0,y) \equiv \frac{\partial a_i}{\partial x}(0,0,y) \equiv 0$; il en est donc de même pour ces nouveaux coefficients, à condition de remarquer, comme dans la démonstration du lemme 1, que $\frac{\partial a_i}{\partial x} = 0$ sur $t = x = 0$ entraîne $\frac{\partial a_i}{\partial X} = 0$ sur $T = X = 0$.

Ceci termine à la fois la démonstration du lemme 2 et celle de la proposition 1.

II.2 - Dernières notations

Les trois paragraphes qui suivent sont consacrés à la démonstration du théorème 1 : nous avons découpé ce théorème en trois propositions (les proposition 2, 4 et 6), suivant les méthodes utilisées pour les démonstrations, que nous énonçons avec les coordonnées que donne la proposition 1 ; c'est pourquoi nous ajoutons les notations suivantes :

$$\text{pour } \eta \in \mathbb{R}^n \text{ , } q(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{i,j}(0,0,0)\eta_i\ \eta_j$$

$$\text{et} \quad q'(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (c_{i,j})'_x\,(0,0,0)\eta_i\ \eta_j$$

L'hypothèse (H3) prend alors la forme :

(2.3) $\qquad \exists \eta_1 \in \mathbb{R}^n \setminus 0$ tel que $q(\eta_1) = 0$ et $q'(\eta_1) > 0$

et l'hypothèse (H4) devient :

(2.4) $\qquad \forall\, \eta \in \mathbb{R}^n \setminus 0$, $\qquad q(\eta) = 0 \Rightarrow q'(\eta) < 0$

III - CONSTRUCTION D'UN CONTRE-EXEMPLE

Nous nous proposons, dans ce paragraphe, de démontrer le tout début du théorème 1, que nous pouvons rappeler sous la forme d'une proposition.

Proposition 2 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2). Alors il existe un voisinage Ω de l'origine, et des fonctions α et u C^∞ dans Ω et plates sur $\{t = 0\}$ tels que :

$$\begin{cases} 0 \in \mathrm{supp}\ u \subset \{t \geqslant 0\} & \text{et} \\ (P+\alpha)\ u = 0 & \text{dans } \Omega\ . \end{cases}$$

Remarques : (i) L'hypothèse portant, comme nous l'avons vu en I.3, sur la bicaractéristique conormale, il est naturel que celle-ci se trouve au centre de notre construction. (ii) La démonstration de la proposition 2 se déroule en deux temps : d'abord construction d'une solution formelle par les méthodes de l'optique géométrique, question à laquelle nous consacrerons les deux premières sections ; puis nous construirons la véritable solution en faisant converger asymptotiquement la série solution formelle, opération qui constituera l'objet des deux dernières sections.

III.1 - Construction d'une fonction phase φ et d'une suite de fonctions plates $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$

Lemme 3 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2). Alors il existe une fonction $\varphi(t,x,y)$ C^∞ dans un voisinage de l'origine et vérifiant

$$p(t,x,y;\varphi'_t\ ,\ \varphi'_x\ ,\ \mathrm{grad}_y\varphi) \equiv 0 \tag{3.1}$$

et

$$0 \in \{\varphi \geqslant 0\} \subset \{t \geqslant 0\} \tag{3.2}$$

dans ce voisinage.

Lemme 4 : La suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de fonctions C^∞ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f_o|_{]-\infty,0]} = 0 \quad \text{et} \quad f_o(t) = e^{-1/t} \ \text{pour}\ t > 0\ ; \\ \forall t \in \mathbb{R}\ ,\ f_j(t) = \displaystyle\int_o^t f_{j-1}(\theta)\ d\theta \end{cases} \tag{3.3}$$

vérifie pour tout $j \in \mathbb{N}$ *et pour tout* $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \leqslant f_j(t) \leqslant \frac{t^j}{j!} e^{-1/t} \tag{3.4}$$

Démonstration du lemme 3 : Nous commençons par faire deux remarques : la première, c'est que la 2-forme symplectique ainsi que le symbole p s'annulent sur la variété

$$\Sigma = \{(t,0,y;1,0,0) \ / \ (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\} \subset T^*X$$

puisque (1,0,0) est le gradient de la fonction $\varphi(t,0,y) = t$; la deuxième, c'est que les bandes bicaractéristiques issues des points de Σ (nous réservons le terme de "courbe bicaractéristique" ou plus simplement de "bicaractéristique" pour la projection sur X des bandes bicaractéristiques) vérifient $\dot{x}_0 = 2a(t,0,y)$, et sont donc transverses à Σ au voisinage de (0,0,0;1,0,0) à cause de la condition $A > 0$ contenue dans (2.1). Nous sommes alors dans des circonstances classiques pour construire une variété lagrangienne annulant p : c'est la variété Λ obtenue par réunion des bandes bicaractéristiques passant par les points de Σ ; cela implique qu'il existe une fonction φ vérifiant (3.1).

Plus concrètement, cette construction revient à définir φ par :

$$\begin{cases} \varphi(t,0,y) = t \\ \varphi \text{ est constante le long des bicaractéristiques issue des points de } \Sigma\ . \end{cases}$$

Nous vérifions tout de suite que $0 \in \{\varphi \geqslant 0\}$, et pour voir que $\{\varphi \geqslant 0\} \subset \{t \geqslant 0\}$, il suffit de montrer que $\{\varphi = 0\} \subset \{t > 0\}$; or $\{\varphi = 0\}$ est la réunion des bicaractéristiques issues des points (0,0,y;1,0,0), et donc pour obtenir (3.2), il suffit encore de montrer que pour y proche de 0, ces bicaractéristiques vérifient :

$$\dot{t}_0 = 0 \quad \text{et} \quad \ddot{t}_0 > 0 \tag{3.5}$$

Nous formons donc les calculs :

$$\dot{t} = 2x\tau + 2a\xi + \sum_{i=1}^{n} 2a_i\, n_i \Rightarrow \dot{t}_0 = 0$$

Puis

$$\dot{x} = 2a\tau + 2b\xi + \sum_{i=1}^{n} 2b_i\,\eta_i \qquad \text{d'où}$$

$$\ddot{t} = 2(2a\tau + 2b\xi + \sum_{i=1}^{n} 2b_i\,\eta_i)\tau + 2x\dot{\tau} + 2\dot{a}\xi - 2a\,\frac{\partial p}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} (2\dot{a}_i\,\eta_i + 2a_i\,\dot{\eta}_i)$$

$$\Rightarrow \ddot{t}_0 = (4a\tau^2 - 2a\tau^2)_0 = 2a(0,0,y)$$

donc $\ddot{t}_0 > 0$ pour y proche de 0 puisque $A > 0$ (cf. (2.1)). Ceci termine la vérification de (3.5), donc celle de (3.2), et par là la construction de la phase φ.

Démonstration du lemme 4 : par récurrence.

L'inégalité (3.4) est en fait une égalité pour $j = 0$.

Supposons que nous avons démontré la propriété au rang $j - 1$; alors, sur $\mathbb{R}_+$,

$$\frac{d}{dt}\left(f_j(t) - \frac{t^j}{j!}\,e^{-1/t}\right) = f_{j-1}(t) - \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,e^{-1/t} - \frac{t^{j-2}}{j!}\,e^{-1/t} \leqslant$$

$$\leqslant f_{j-1}(t) - \frac{t^{j-1}}{(j-1)!}\,e^{-1/t} \leqslant 0 \ .$$

La dernière inégalité étant une traduction de l'hypothèse de récurrence. La fonction $f_j(t) - \frac{t^j}{j!}\,e^{-1/t}$ qui est nulle en 0 possède une dérivée négative sur $\mathbb{R}_+$ et est donc elle-même négative sur $\mathbb{R}_+$, ce qui achève la démonstration de ce lemme.

III.2 - Construction d'une solution formelle

Au vu de (3.4), nous pouvons considérer que les $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ constituent une échelle permettant de "mesurer la platitude" ; cette remarque donne toute sa signification à la proposition suivante :

Proposition 3 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2). Alors il existe une suite de fonctions $(\alpha_j(t,x,y))_{j\in\mathbb{N}}$ C^∞ dans un voisinage Ω de l'origine telle que la série

(3.6) $$u(t,x,y) = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j(t,x,y) f_j \circ \varphi\,(t,x,y)$$

(où φ *et* $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *sont celles des lemmes 3 et 4) soit une solution formelle de :*

$$\begin{cases} Pu = 0 \\ \text{supp } u \subset \{t \geqslant 0\} \end{cases}$$

dans ce sens que pour tout $j_o \in \mathbb{N}$, *la fonction* $u_{j_o}(t,x,y) = \sum_{j=0}^{j_o} \alpha_j(t,x,y) f_j \circ \varphi\,(t,x,y)$ *vérifie*

$$\begin{cases} Pu_{j_o} = 0\ (f_{j_o} \circ \varphi(t,x,y)) \text{ pour } \varphi(t,x,y) \text{ voisin de } 0 \\ \text{supp } u_{j_o} \subset \{t \geqslant 0\} \end{cases}$$

Remarques : (i) Pour obtenir Pu = 0, la seule propriété de la suite $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}$ que nous utilisons est que $f_j' = f_{j-1}$; le choix de la suite (3.3) (c'est-à-dire en fait de f_0) s'explique par le désir d'avoir supp u $\subset \{t \geqslant 0\}$, résultat qui découle de (3.2), (3.3) et (3.6). (ii) Afin d'alléger les notations, nous n'écrirons plus les variables (t,x,y) que lorsque c'est indispensable ; par exemple, nous écrirons $u = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j\, f_j(\varphi)$. (iii) Enfin, dans les calculs concernant les f_j, nous ne distinguerons plus entre $t > 0$ et $t \leqslant 0$; le lecteur scrupuleux vérifiera par lui-même que ces allégements ne renferment aucun canular.

Démonstration de la proposition 3 : Déterminons l'effet de l'opérateur P sur le $j^{\text{ème}}$ terme $\alpha_j\, f_j(\varphi)$ de la série (3.6). D'une façon générale, nous pouvons écrire :

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(\alpha_j\, f_j(\varphi)) = (\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_j) f_j(\varphi) + \alpha_j(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi) f_{j-1}(\varphi)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}(\alpha_j\, f_j(\varphi)) = (\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\alpha_j) f_j(\varphi) + (\frac{\partial}{\partial x_i}\alpha_j)(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi) f_{j-1}(\varphi) +$$

$$+(\frac{\partial}{\partial x_k}\alpha_j)(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi) f_{j-1}(\varphi) + \alpha_j(\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k}\varphi) f_{j-1}(\varphi) + \alpha_j(\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi)(\frac{\partial}{\partial x_k}\varphi) f_{j-2}(\varphi)$$

donc

$$(3.7)\qquad \begin{cases} P(\alpha_j\, f_j(\varphi)) = (P\alpha_j) f_j(\varphi) + (Q\alpha_j) f_{j-1}(\varphi) + \\ \qquad + \alpha_j\, p(t,x,y;\varphi'_t,\varphi'_x,\mathrm{grad}_y\varphi) f_{j-2}(\varphi) \end{cases}$$

où

$$(3.8)\qquad \begin{cases} Q = \mathrm{grad}_{\tau,\xi,\eta}\, p(t,x,y;\varphi'_t,\varphi'_x,\mathrm{grad}_y\varphi)\cdot \mathrm{grad} + (P\varphi - h\varphi) \\ \quad = (2x\,\varphi'_t + 2a\,\varphi'_x + \sum_{i=1}^{n} 2a_i\,\varphi'_{y_i})\, D_t + \\ \quad + (2a\,\varphi'_t + 2b\,\varphi'_x + \sum_{i=1}^{n} 2b_i\,\varphi'_{y_i})\, D_x + \\ \quad + \sum_{i=1}^{n} \mu_i\, D_{y_i} + (P\varphi - h\varphi) \end{cases}$$

Remarque : Nous voyons sur la deuxième expression donnée par (3.8) que la variété $\{x = 0\}$ est non caractéristique pour Q au voisinage de l'origine, ce qui n'étonnera personne puisque, aux termes d'ordre 0 près, Q est la dérivation le long des bicaractéristiques ... qui sont transverses à $\{x = 0\}$!

Compte tenu de (3.1) et de (3.7), nous pouvons donc écrire :

$$(3.9)\qquad Pu_{j_o} = (Q\alpha_o) f'_o(\varphi) + \sum_{j=0}^{j_o-1} (P\alpha_j + Q\alpha_{j+1}) f_j(\varphi) + (P\alpha_{j_o}) f_{j_o}(\varphi)$$

En conséquence, nous définissons la suite de fonctions $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ par la suite de problèmes de Cauchy suivante :

$$(3.10)\qquad \begin{cases} Q\alpha_o = 0 \\ \alpha_o|_{x=0} \equiv 1 \end{cases} \qquad \text{puis, pour } j \geq 0 \qquad \begin{cases} Q\alpha_{j+1} = -P\alpha_j \\ \alpha_{j+1}|_{x=0} \equiv 0 \end{cases}$$

(Nous définissons α_j sur $\{x = 0\}$ parce que cette variété est non caractéristique pour Q (cf. (3.8) et la remarque) ; il est clair que ces données de Cauchy n'ont à peu près aucune importance).

Comme Q est du premier ordre, nous savons que toutes les fonctions α_j

sont définies par (3.10) sur un même voisinage Ω, et le rapprochement de (3.9) et de (3.10) complète alors notre démonstration.

III.3 - Début de la démonstration de la proposition 2 : construction d'une fonction u

Nous cherchons une solution qui ressemble autant que possible à la solution formelle donnée par la proposition 3 près de l'origine, mais qui vérifie des propriétés de convergence que nous allons préciser ; pour cela nous posons :

$$u = \sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \chi(\lambda_j \varphi) f_j(\varphi) \tag{3.11}$$

où $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j f_j(\varphi)$ est la solution formelle de la proposition 3, χ une fonction C^∞ de troncature définie par

$$\chi_{|]-\infty,1/2]} \equiv 1 \ , \ \chi([1/2,1]) = [0,1], \ \chi_{|[1,\infty[} \equiv 0 \ , \tag{3.12}$$

et $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels positifs que nous allons fixer au cours de cette section.

Pour orienter le choix des λ_j, remarquons que si la série (3.11) est normalement convergente, nous pouvons reprendre les calculs (3.7) à (3.9) en rajoutant le terme supplémentaire $\chi(\lambda_j\varphi)$; nous obtenons :

$$Pu = (Q\alpha_0)\, \chi(\lambda_0\varphi)\, f_0'(\varphi) + \sum_{j=0}^{\infty} \Big[(P\alpha_j)\, (\chi(\lambda_j\varphi) - \chi(\lambda_{j+1}\varphi)) + (Q\alpha_j)\lambda_j \chi'(\lambda_j\varphi) \Big] f_j(\varphi) \tag{3.13}$$

Avec l'idée d'utiliser (3.4), nous choisissons alors la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ par le

Lemme 5 : Il existe une suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ de réels positifs telle que les séries

$$\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \chi(\lambda_j\varphi) \frac{\varphi^j}{j!} \tag{3.14}$$

et, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$(3.15) \qquad \sum_{j=k}^{\infty} \left[(P\alpha_j)\ (\chi(\lambda_j\varphi) - \chi(\lambda_{j+1}\varphi)) + (Q\alpha_j)\ \lambda_j\ \chi'(\lambda_j\varphi) \right] \frac{\varphi^{j-k}}{j!}$$

soient normalement convergentes sur un voisinage Ω *de l'origine.*

Démonstration du lemme 5 : Remarquons tout d'abord que nous pouvons supposer que le voisinage Ω de la proposition 3 est compact et que la fonction φ y prend des valeurs inférieures à 1, quitte à restreindre un petit peu ce voisinage.

Pour assurer la convergence de (3.14), il suffit alors de prendre $\lambda_j \geqslant (\sup_{\Omega} |\alpha_j|)^{1/j}$; en effet, comme supp χ =]-∞,1] (cf. (3.12)),

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_j\ \chi(\lambda_j\varphi)\ \dfrac{\varphi^j}{j!} \neq 0 \Rightarrow \varphi \leqslant 1/\lambda_j \\ \lambda_j \geqslant (\sup_{\Omega} |\alpha_j|)^{1/j} \end{array}\right\} \Rightarrow \varphi^j \leqslant \frac{1}{\sup_{\Omega}|\alpha_j|}$$

et donc

$$\forall\ j \in \mathbb{N}\ , \quad \sup_{\Omega} \left|\alpha_j\ \chi(\lambda_j\varphi)\ \frac{\varphi^j}{j!}\right| \leqslant \frac{1}{j!}$$

ce qui donne bien la convergence normale de (3.14) sur Ω.

De même, pour assurer la convergence de (3.15), il suffit de prendre

$$\lambda_j \geqslant (\sup_{\Omega} |P\alpha_j|)^{2/j} \quad \text{et} \quad \lambda_j \geqslant (\sup_{\Omega} |Q\alpha_j|)^{2/j}$$

En effet, comme supp $\chi' \subset$ supp χ =]-∞,1], si le $j^{\text{ième}}$ terme de la série (3.15) est non nul, c'est que $\varphi \leqslant 1/\lambda_j$; $\varphi^{j-k} = \varphi^{j/2}\ \varphi^{j/2-k}$ entraîne alors que :

$$\lambda_j \geqslant (\sup_{\Omega} |P\alpha_j|)^{2/j} \Rightarrow \varphi^{j-k} \leqslant \frac{1}{\sup_{\Omega}|P\alpha_j|}\ \varphi^{j/2-k} \quad \text{et}$$

$$\lambda_j \geqslant (\sup_{\Omega} |Q\alpha_j|)^{2/j} \Rightarrow \lambda_j\ \varphi^{j-k} \leqslant \frac{1}{\sup_{\Omega}|Q\alpha_j|}\ \varphi^{j/2-k-1}$$

et donc, pour $j \geqslant 2k+2$, on obtient (en utilisant que $j/2-k$ et $j/2-k-1$ sont positifs

et que φ est inférieure à 1 sur Ω) :

$$\sup_{\Omega} \left| \left[(P\alpha_j)\ (\chi(\lambda_j\varphi) - \chi(\lambda_{j+1}\varphi)) + (Q\alpha_j)\ \lambda_j\ \chi'(\lambda_j\varphi) \right] \frac{\varphi^{j-k}}{j!} \right| \leqslant \frac{1 + \sup_{[1/2,1]} |\chi'|}{j!}$$

ce qui donne bien la convergence de (3.15) sur Ω.

Pour terminer la démonstration du lemme 5, il nous suffit donc de définir la suite $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ comme suit :

$$\lambda_j = \max \{ (\sup_{\Omega} |\alpha_j|)^{1/j}\ ,\ (\sup_{\Omega} |P\alpha_j|)^{2/j}\ ,\ (\sup_{\Omega} |Q\alpha_j|)^{2/j} \}$$

Remarque : La convergence normale de la série (3.14) entraîne celle de la série (3.11) (à cause de (3.4)), ce qui complète notre définition de u et justifie le calcul (3.13).

III.4 - Fin de la démonstration de la proposition 2

Munis de la fonction u construite en III.3, nous avons trois choses à vérifier : que u a son support dans $\{t \geqslant 0\}$, que 0 est dans le support de u, et enfin que la fonction $\alpha = - Pu/u$ est C^∞, plate sur $t = 0$.

Pour la première, c'est immédiat :

$$\forall j \in \mathbb{N}\ ,\ \text{supp}\ f_j = \mathbb{R}_+ \Rightarrow \text{supp}\ u \subset \{\varphi \geqslant 0\} \subset \{t \geqslant 0\}$$

cette dernière inclusion étant donnée par (3.2).

Pour obtenir la deuxième, nous allons établir que $u \sim e^{-1/\varphi}$ au voisinage de l'origine :

$$\text{pour } \varphi \leqslant 1/2\,\lambda_0\ ,\quad u\, e^{1/\varphi} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\ \chi(\lambda_j\varphi)\ f_j(\varphi)\ e^{1/\varphi}$$

Grâce au lemme 4 et à la convergence normale de la série (3.14) (lemme 5), l'expression précédente montre que

$$\lim_{(t,x,y)\to(0,0,0)} u.\ e^{1/\varphi} = \lim_{(t,x,y)\to(0,0,0)} \alpha_0 = 1 \qquad \text{(cf. (3.10))}\ .$$

Enfin, comme $u \sim \alpha_0 \, e^{-1/\varphi}$ pour $\varphi(t,x,y)$ voisin de 0 (ce qui se démontre exactement comme précédemment) et qu' α_0 est non nul au voisinage de 0, il suffit pour obtenir notre dernière vérification de montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$(3.16) \qquad Pu \, . \, e^{1/\varphi} = O(\varphi^k) \quad \text{pour} \quad \varphi(t,x,y) \text{ voisin de } 0$$

Or, k étant fixé, la formule (3.13) donne

$$\forall j \leqslant k, \ \varphi(t,x,y) \leqslant 1/2 \, \lambda_j \Rightarrow Pu = \sum_{j=k}^{\infty} \left[(P\alpha_j) \, (\chi(\lambda_j\varphi) - \chi(\lambda_{j+1}\varphi)) + (Q\alpha_j) \, \lambda_j \, \chi'(\lambda_j\varphi) \right] f_j(\varphi)$$

d'où

$$Pu.e^{1/\varphi} = \varphi^k \sum_{j=k}^{\infty} \left[(P\alpha_j) \, (\chi(\lambda_j\varphi) - \chi(\lambda_{j+1}\varphi)) + (Q\alpha_j)\lambda_j \, \chi'(\lambda_j\varphi) \right] f_j(\varphi) \, \varphi^{-k} \, e^{1/\varphi}$$

Mais d'après (3.4),

$$f_j(\varphi) \, \varphi^{-k} \, e^{1/\varphi} \leqslant \frac{\varphi^{j-k}}{j!}$$

donc, puisque la série (3.15) est normalement convergente (cf. le lemme 5),

$$Pu.e^{1/\varphi} = \varphi^k . \, \sigma$$

où σ est la somme d'une série normalement convergente, ce qui démontre (3.16) et achève ainsi la preuve de la proposition 2.

IV - POUR LES AUTRES CONTRE-EXEMPLES

Avec ce nouveau paragraphe, nous passons à la démonstration du 1) du théorème 1, que nous rappelons :

Proposition 4 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2)-(2.3). Alors il existe un voisinage Ω de l'origine, un opérateur Q C^∞ du premier ordre et une fonction u C^∞ dans Ω tels que

$$\begin{cases} 0 \in \mathrm{supp}\ u \subset \{t \leqslant 0\} & \text{et} \\ (P + Q)\ u = 0 & \text{dans } \Omega\ . \end{cases}$$

Notre première idée serait de construire à l'aide de la bicaractéristique que donne l'hypothèse (2.3) une fonction φ comme nous avons fait en III.1 à l'aide de la bicaractéristique conormale. Mais nous voyons tout de suite que c'est impossible car la condition (3.2) implique que grad $\varphi(0,0,0) = (\tau_0,0,0)$, ce qui n'autorise la construction de III.1 que dans le cas de la bicaractéristique conormale.

Nous parviendrons à obtenir un contre-exemple par une technique plus subtile que nous empruntons à Hörmander [9] et qui consiste à répartir les propriétés de la fonction φ du lemme 3 dans deux fonctions distinctes φ et ψ : ψ (qui vérifiera (3.1)) permettra de réduire l'équation, tandis que φ (qui vérifiera (3.2)) servira de support à la solution ; la parenté entre φ et ψ réside dans cette propriété qu'elles sont constantes le long de chacune des bicaractéristiques d'une même famille.

Ajoutons encore que le résultat d'Hörmander que nous allons utiliser ici à récemment été amélioré par Alinhac-Baouendi [2] (où ces auteurs remplacent Q par une fonction plate sur $\{t = 0\}$),mais seulement pour des opérateurs "pas trop caractéristiques", c'est-à-dire au pire du type de Fuchs ; cette technique ne peut malheureusement pas être employée ici.

IV.1 - Construction d'une famille de bicaractéristiques

Notons π la projection canonique de T^*X sur X.

Lemme 6 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2)-(2.3). Alors il existe dans un voisinage Ω de l'origine une sous-variété Σ de X de codimension 1 passant par 0 et une application C^∞ $f : \Sigma \to T^*X$ telles que :

(i) $\pi \circ f = Id_\Sigma$ *et* $p \circ f \equiv 0$ *sur* Σ ;

(ii) *par chaque point de* Ω *passe une bicaractéristique et une seule issue d'un point de* $f(\Sigma)$;

(iii) *La bicaractéristique issue de* $f(0)$ *est "convexe" (cf. I.3.c) et située du côté* $t \leqslant 0$.

Démonstration : Commençons par nous occuper de f(0) : l'hypothèse (2.3) nous permet d'affirmer que $p(0,0,0;0,0,\eta_1) = 0$; mais nous avons aussi $p(0,0,0;\tau_1,0,\eta_1) = 0$ pour n'importe quelle valeur de τ_1, ce qui nous laisse, pour le choix de f(0), une certaine liberté dont nous allons profiter plus loin (cette liberté est très liée à l'ordre 2 de l'opérateur, et à l'hypothèse (H2) sur la bicaractéristique conormale !). Pour vérifier (iii), nous devons mener les calculs suivants :

$$\dot{t} = 2x\tau + 2a\xi + \sum_{i=1}^{n} 2a_i\ \eta_i \Rightarrow \dot{t}_o = 0$$

puis

$$\dot{x} = 2a\tau + 2b\xi + \sum_{i=1}^{n} 2b_i\ \eta_i \Rightarrow \dot{x}_o = 2A\tau_1$$

$$\dot{\xi} = -p'_x \Rightarrow \dot{\xi}_o = -\tau_1^2 - q'(\eta_1)$$

$$\ddot{t} = 2\dot{x}\tau + 2x\dot{\tau} + 2\dot{a}\xi + 2a\dot{\xi} + \sum_{i=1}^{n} (2\dot{a}_i\ \eta_i + 2a_i\ \dot{\eta}_i) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ddot{t}_o = 2A(\tau_1^2 - q'(\eta_1))$$

Pour obtenir (iii) il suffit donc de poser

$$(4.1) \qquad \begin{cases} f(0) = (0,0,0;\tau_1,0,\eta_1) \\ \text{avec } |\tau_1| < (q'(\eta_1))^{1/2} \end{cases}$$

Nous savons que $p(0,0,0;\tau_1,0,\eta_1) = 0$ et que $p'_x(0,0,0;\tau_1,0,\eta_1) = \tau_1^2 + q'(\eta_1) \neq 0$ (à cause de (2.3)). Il existe donc, grâce au théorème des fonctions implicites, une fonction C^∞ $\sigma : \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ telle que $\sigma(0,0) = 0$ et que l'on ait, au voisinage de 0 :

$$p(t,x,y;\tau_1,0,\eta_1) = 0 \iff x = \sigma(t,y)$$

Pour obtenir (i), il suffit donc de poser

$$(4.2)\quad \begin{cases} \Sigma = \{(t,\sigma(t,y),y) \;/\; (t,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\} \quad \text{et} \\ f(t,\sigma(t,y),y) = (t,\sigma(t,y),y;\tau_1,0,\eta_1) \end{cases}$$

toutes ces constructions n'ayant un sens que dans un voisinage Ω de l'origine.

Il ne nous reste plus qu'à montrer qu'il existe une valeur de τ_1, dans la fourchette autorisée par (4.1), telle que le couple (Σ,f) défini par (4.2) vérifie (ii).

Dans ce but, prouvons d'abord que nous pouvons choisir τ_1 tel que la bicaractéristique issue de f(0) soit transverse à Σ en 0 ; il en sera ainsi si τ_1 n'annule pas la fonction :

$$\theta(\tau_1) = -\sigma'_t(0,0)\,\dot{t}_o + \dot{x}_o - \sum_{i=1}^{n} \sigma'_{y_i}(0,0)\,(\dot{y}_i)_o =$$

$$= \frac{1}{\tau_1^2+q'(\eta_1)}\,\mathrm{grad}_{t,x,y}\,p(0,0,0;\tau_1,0,\eta_1).\mathrm{grad}_{\tau,\xi,\eta}\,p(0,0,0;\tau_1,0,\eta_1)\ .$$

Mais le produit scalaire des gradients est un polynôme en τ_1 dont le terme de plus haut degré vaut $2A\,\tau_1^3$; la fonction $\theta(\tau_1)$ s'annule donc au plus trois fois. Dès lors, l'existence d'un τ_1, même dans les limites prescrites par (4.1), n'annulant pas θ est immédiate. Nous fixons désormais une telle valeur de τ_1.

Utilisons la lettre s pour désigner la variable intervenant dans les équations d'Hamilton-Jacobi : $dt/ds = \partial p/\partial\tau$, $d\tau/ds = -\partial p/\partial t$ etc ..., et notons $\chi(t,s,y)$ le point (t_s,x_s,y_s) de paramètre s sur la bicaractéristique issue de $(t,\sigma(t,y),y;\tau_1,0,\eta_1)$ Comme $\theta(\tau_1)$ est le déterminant de la matrice jacobienne de χ en 0, la transversalité de la bicaractéristique issue de f(0) permet d'utiliser le théorème d'inversion locale : χ est un difféomorphisme au voisinage de 0, ce qui implique (ii), quitte à restreindre le voisinage Ω.

Ceci achève la démonstration du lemme 6.

IV.2 - Construction des fonctions φ et ψ

Proposition 5 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2)-(2.3). Alors il existe deux fonctions $\varphi(t,x,y)$ et $\psi(t,x,y)$ C^∞ dans un voisinage Ω de l'origine, dont les gradients sont linéairement indépendants en 0, et qui vérifient :

$$p(t,x,y;\psi'_t\ ,\ \psi'_x\ ,\mathrm{grad}_y\psi) \equiv 0\ , \tag{4.3}$$

$$\mathrm{grad}_{\tau,\xi,\eta}\, p(t,x,y;\psi'_t\ ,\psi'_x\ ,\mathrm{grad}_y\psi)\cdot \mathrm{grad}\,\varphi \equiv 0\ , \tag{4.4}$$

et

$$0 \in \{\varphi \leqslant 0\} \subset \{t \leqslant 0\} \tag{4.5}$$

dans Ω .

Démonstration : Prenant les notations du lemme 6 et de sa démonstration, nous appelons $\mathcal{F}$ la famille des bicaractéristiques issues des points de $f(\Sigma)$.

Pour les mêmes raisons qu'en III.1, nous définissons la phase ψ par :

$$\begin{cases} \psi(t,\sigma(t,y),y) = t\tau_1 + \sum_{i=1}^{n} y_i\,(\eta_1)i \\ \psi \text{ constante le long des éléments de } \mathcal{F} \end{cases} \tag{4.6}$$

Cette fonction ψ vérifie (4.3) comme on peut s'en assurer en répétant les arguments de variété lagrangienne invoqués en III.1. L'opérateur

$$\mathrm{grad}_{\tau,\xi,\eta}\, p(t,x,y;\psi'_t\ ,\psi'_t\ ,\psi'_x\ ,\mathrm{grad}_y\psi)\ .\ \mathrm{grad}$$

est alors l'opérateur de dérivation le long des éléments de $\mathcal{F}$. Comme de plus :

$$\left.\begin{array}{l} (4.5) \Rightarrow \mathrm{grad}\ \varphi(0,0,0) = (\tau_0,0,0) \\ (4.6) \Rightarrow \mathrm{grad}\ \psi(0,0,0) = (\tau_1,0,\eta 1) \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \mathrm{grad}\ \varphi(0,0,0) \text{ et } \mathrm{grad}\ \psi(0,0,0) \\ \text{sont linéairements indépendants} \end{array}\right.$$

puisque $\eta_1 \neq 0$ (cf. (2.3)), il suffit donc, pour terminer la démonstration de la

proposition 5, de construire une fonction φ constante le long des éléments de $\mathcal{F}$ et vérifiant (4.5).

Nous définissons donc φ par

$$\begin{cases} \varphi(t,\sigma(t,y),y) = t + \lambda|y|^2 \quad \text{et} \\ \varphi \text{ est constante le long des éléments de } \mathcal{F} \end{cases}$$

où λ est une constante positive à déterminer, et $|y| = (\sum_{i=1}^{n} y_i^2)^{1/2}$. Pour les mêmes motifs qu'en III.1, il nous suffit de montrer que $\{\varphi = 0\} \subset \{t \leqslant 0\}$; or $\{\varphi = 0\}$ est la réunion des bicaractéristiques issues des points $(-\lambda|y|^2, \sigma(-\lambda|y|^2,y), y;\tau_1,0,\eta_1)$.

Utilisant les résultats du lemme 6, nous écrivons que la bicaractéristique issue de f(0) vérifie : $\ddot{t}_o = 2A(\tau_1^2 - q'(\eta_1)) = -\mu$ avec $\mu > 0$; nous pouvons donc restreindre le voisinage Ω du lemme 6 de telle façon qu'en chacun de ses points, $\ddot{t} \leqslant -\frac{\mu}{2}$ pour la bicaractéristique appartenant à $\mathcal{F}$ et passant par ce point. Par conséquent, en tout point de Ω nous pouvons écrire :

$$t_s \leqslant -\frac{\mu s^2}{4} + \dot{t}_o\, s + t_o \tag{4.7}$$

Pour les bicaractéristiques issues des points $(-\lambda|y|^2, \sigma(-\lambda|y|^2,y),y ; \tau_1,0,\eta_1)$, nous avons

$$t_o = -\lambda|y|^2 \quad \text{et} \tag{4.8}$$

$$\dot{t}_o = 2\sigma(-\lambda|y|^2,y)\tau_1 + \sum_{i=1}^{n} 2a_i(-\lambda|y|^2, \sigma(-\lambda|y|^2,y),y)\,(\eta_1)_i \tag{4.9}$$

Pour $y = 0$, (4.9) donne $\dot{t}_o = 0$, et comme de plus $\dot{t}_o$ est une fonction dérivable de y, il existe une constante ν telle que

$$|\dot{t}_o| \leqslant \nu|y| \tag{4.10}$$

et ν est indépendante de λ puisque c'est une norme de la dérivée première de $\dot{t}_o(y)$ en 0.

Reprenant (4.7) et (4.8), nous écrivons

$$t_s \leqslant -\frac{\mu s^2}{4} + \dot{t}_o\, s - \lambda|y|^2 \tag{4.11}$$

dont le membre de droite est un trinôme du deuxième degré en s admettant pour discriminant

$$\Delta = \dot{t}_o^{\,2} - \mu\lambda|y|^2$$

qui vérifie, grace à (4.10)

$$\Delta \leqslant (\nu^2 - \mu\lambda)\,|y|^2$$

Si donc nous choisissons $\lambda > \frac{\nu^2}{\mu}$, (4.11) implique que

$$t_s \leqslant 0$$

en tout point de Ω situé sur une bicaractéristique issue d'un point $(-\lambda|y|^2, \sigma(-\lambda|y|^2, y), y; \tau_1, 0, \eta_1)$. Cela termine la construction de φ, et avec elle notre démonstration.

IV.3 - Démonstration de la proposition 4

Nous empruntons le dénouement de ce paragraphe à Hörmander [9], théorème 8.9.4 ; les hypothèses en ont été établies par la proposition 5 : ce sont les propriétés (4.3) et (4.4) ; la conclusion, compte tenu de (4.5) est celle que nous avions annoncée dans la proposition 4.

V - POUR L'UNICITE

Nous passons maintenant à la démonstration du troisième volet du théorème 1 :

Proposition 6 : Soit P un opérateur différentiel de la forme (2.1)-(2.2)-(2.4). Alors il existe deux voisinages Ω_1 et Ω_2 de l'origine tels que

$$\forall u \in C^\infty(\Omega_1) \ , \ \begin{cases} supp\ u \subset \{t \leqslant 0\} \ \underline{et} \\ Pu = 0 \ \underline{dans}\ \Omega_1 \end{cases} \Rightarrow u \equiv 0 \ \underline{dans}\ \Omega_2$$

Nous démontrons cette proposition par le critère de pseudo-convexité d'Hörmander (cf. [9], théorème 8.9.1) : il nous suffit de montrer que sous nos hypothèses (H1), (H2) et (H4), la surface $\{t = 0\}$ est fortement pseudo-convexe en 0 pour l'opérateur P (cf. Hörmander [9], définition 8.6.1), ce que nous résumons dans la proposition suivante.

Proposition 7 : Soit P un opérateur de la forme (2.1)-(2.2)-(2.4). Alors

$$(5.1) \quad \begin{cases} \forall \sigma \in \mathbb{R} \setminus 0 \ , \ \forall (\tau, \xi, \eta) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n \ , \\ \underline{si\ nous\ posons}\ \pi = (0,0,0;\tau+i\sigma,\xi,\eta) \ , \\ p(\pi) = 0 \Rightarrow \sigma^{-1}\, Im\Big[p'_t(\pi)\, p'_\tau(\bar\pi) + p'_x(\pi)\, p'_\xi(\bar\pi) + \sum_{j=1}^{n} p'_{y_i}(\pi)\, p'_{y_i}(\bar\pi)\Big] > 0 \end{cases}$$

Démonstration : Au vu de (2.1) et de (2.2), nous avons :

$$p(\pi) = 0 \Rightarrow 2A(\tau+i\sigma)\xi + q(\eta) = 0 \ ,$$

et, en distinguant partie réelle et partie imaginaire,

$$p(\pi) = 0 \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 2A\sigma\xi = 0 \Rightarrow \xi = 0 \\ 2A\tau\xi + q(\eta) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow q(\eta) = 0$$

donc, en utilisant (2.4) ,

$$(5.2) \qquad p(\pi) = 0 \Rightarrow \xi = 0 \ \text{ et } \ q'(\eta) < 0$$

Calculons alors

$$\sigma^{-1}\ \mathrm{Im}\Big[p'_t(\pi)\ p'_\tau(\bar\pi) + p'_x(\pi)\ p'_\xi(\bar\pi) + \sum_{j=1}^{n} p'_{y_j}(\pi)\ p'_{\eta_j}(\bar\pi)\Big] =$$

$$= \sigma^{-1}\Big[\mathrm{Im}\ ((\tau+i\sigma)^2 + q'(\eta))\ 2A(\tau-i\sigma) + \xi(r_1+i\sigma r_2) + r_3\Big]$$

où r_1, r_2 et r_3 sont des polynômes réels en (τ,σ,ξ,η) qu'il est inutile de calculer. Nous obtenons donc

$$\sigma^{-1}\Big[\mathrm{Im}\ p'_t(\pi)\ p'_\tau(\bar\pi) + p'_x(\pi)\ p'_\xi(\bar\pi) + \sum_{j=0}^{n} p'_{y_j}(\pi)\ p'_{\eta_j}(\bar\pi)\Big] =$$

$$= 2A(\tau^2 + \sigma^2 - q'(\eta)) + \xi\ r_2$$

D'après (5.2), nous obtenons donc (5.1).

VI - OPERATEURS D'ORDRE M > 2

Le but de ce paragraphe est de montrer que si les méthodes de l'optique géométrique utilisées au paragraphe III s'appliquent presque sans modification à des opérateurs d'ordre quelconque [1], en revanche les méthodes des paragraphes IV et V sont essentiellement liées à l'ordre 2, bien que les théorèmes d'Hörmander invoqués dans l'un et l'autre cas soient valables pour des opérateurs d'ordre quelconque.

Pour constater cela, nous allons étudier deux exemples d'opérateurs d'ordre 3.

[1] Cela nous permet donc d'affirmer que pour un opérateur P d'ordre quelconque, nous avons toujours le théorème :

Théorème 1" : Supposons que

(H1) $\quad p(\rho_o) = \{p,t\}\ (\rho_o) = 0$

mais que

(H2) $\quad \{p,\{p,t\}\}\ (\rho_o) \neq 0$,

et appelons Y_+ *le demi-espace fermé de frontière* Y *où* t *est du signe de* $\{p,\{p,t\}\}(\rho_o)$.

Alors il existe un voisinage Ω *de* 0, *et des fonctions* α *et* u C^∞ *dans* Ω *et plates sur* Y *tels que :*

$$\begin{cases} 0 \in supp\ u \subset Y_+ \text{ et} \\ (P+\alpha)\ u = 0 \text{ dans } \Omega\ . \end{cases}$$

VI.1 - Mise en défaut des méthodes du paragraphe IV

Afin de mettre en lumière la signification de la proposition suivante, faisons deux remarques sur la démarche effectuée au paragraphe IV :

a - Comme les surfaces de niveau d'une fonction phase sont constituées de bicaractéristiques, il est nécessaire, au vu des conditions sur φ exigées par la pro-

position 5 (i.e. les conditions (4.4) et (4.5)), que ψ s'appuie sur une bicaractéristique issue d'un point ρ_1 vérifiant l'hypothèse (H3).

b - En reprenant la démonstration du théorème 8.9.4 d'Hörmander (que nous utilisions en IV.3), nous voyons que si nous pouvons nous passer de l'hypothèse "ψ est C^∞ au voisinage de 0" à condition de modifier un peu les conclusions, il est tout à fait indispensable que ψ soit au moins C^m.

Proposition 8 : L'opérateur

$$P_1(t,x;D_t,D_x) = x\,D_t^3 + D_t^2\,D_x + t\,D_x^3$$

vérifie les hypothèses (H1) et (H2) du théorème 1. En outre, il vérifie l'hypothèse (H3) avec $\rho_1 = (0,0;0,1)$ *et avec lui seul, mais il n'admet pas de fonction phase* ψ *de classe* C^2 *avec grad* $\psi(0,0) = (0,1)$.

Démonstration : Pour P_1, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} p(t,x;\tau,\xi) = x\tau^3 + \tau^2\xi + t\xi^3 \\ \{p,t\} = 3x\tau^2 + 2\tau\xi \quad \text{et} \\ \{p,\{p,t\}\} = -\xi^3(6x\tau + 2\xi) + (\tau^2 + 3t\xi^2)3\tau^2 - \tau^3 \cdot 2\tau \end{cases}$$

Les solutions de $p(\rho) = \{p,t\}(\rho) = 0$ sont donc

$$\rho_0 = (0,0;1,0) \quad \text{et} \quad \rho_1 = (0,0;0,1)$$

qui vérifient

$$\{p,\{p,t\}\}(\rho_0) = 1 > 0 \quad \text{et} \quad \{p,\{p,t\}\}(\rho_1) = -2 < 0$$

ce qui montre que P_1 vérifie (H1),(H2) et (H3).

Supposons maintenant qu'il admette une fonction phase ψ avec grad $\psi(0,0) = (0,1)$; alors, sur l'axe $x = 0$ cette fonction vérifie

$$\psi_t'^2\psi_x' + t\,\psi_x'^3 \equiv 0$$

et, comme au voisinage de 0 on a $\psi'_x \neq 0$,

$$\psi'^2_t + t\,\psi'^2_x \equiv 0$$

Nous voyons déjà qu'une telle fonction ne peut exister dans un voisinage de l'origine (pour $t > 0$, l'équation ci-dessus n'a pas de solution) ; si cependant nous la définissions pour $t < 0$, nous écririons :

$$\psi'_t = \varepsilon\sqrt{-t}\,\psi'_x \quad \text{avec } \varepsilon = \pm 1$$

d'où

$$\psi''_{t^2} = \varepsilon\sqrt{-t}\,\psi''_{tx} - \frac{\varepsilon}{2\sqrt{-t}}\,\psi'_x$$

et enfin

$$\psi''_{t^2} \sim -\frac{\varepsilon}{2\sqrt{-t}}$$

ce qui montre que ψ ne peut être C^2, même dans un demi-voisinage de l'origine.

Remarque : Parmi les propositions énoncées au cours du paragraphe IV, c'est avant tout le lemme 6 qui est en défaut pour des opérateurs d'ordre $m > 2$ (nous entendons par là que les opérateurs vérifiant le lemme 6 vérifient du même coup toutes les autres étapes, y compris la conclusion) ; ce qui précède montre que cette obstruction est profondément liée à la méthode utilisée.

VI.2 - Mise en défaut des méthodes du paragraphe V

Pour comprendre la portée de la proposition suivante, il suffit de savoir qu'Hörmander a prouvé (cf. [9], théorème 8.1.1) que la condition (5.1) de la proposition 7 était nécessaire pour avoir des inégalités de Carleman du type :

$$\forall u \in C_0^\infty(\Omega)\ , \quad \forall \tau > \tau_0\ ,$$

$$\tau \sum_{|\alpha|<m} \int_\Omega |D^\alpha u|^2\, e^{2\tau t} \leqslant K \int_\Omega |Pu|^2\, e^{2\tau t}$$

et que la méthode des inégalités de Carleman est la seule méthode un peu générale que

nous connaissions pour démontrer l'unicité pour le problème de Cauchy.

Proposition 9 : L'opérateur

$$P_2(t,x;D_t,D_x) = x\,D_t^3 + D_t^2\,D_x + D_t\,D_x^2 + D_x^3$$

vérifie les hypothèses (H1), (H2) et (H4) du théorème 1 ; en revanche, il ne vérifie pas la propriété (5.1) de la proposition 7.

Démonstration : Pour P_2, nous pouvons écrire :

$$\begin{cases} p(t,x;\tau,\xi) = x\tau^3 + \tau^2\xi + \tau\xi^2 + \xi^3 \\ \{p,t\} = 3x\tau^2 + 2\tau\xi + \xi^2 \qquad \text{et} \\ \{p,\{p,t\}\} = (\tau^2 + 2\tau\xi + 3\xi^2)3\tau^2 - \tau^3\,(2\tau + 2\xi) \end{cases}$$

la seule solution réelle de $p(\rho) = \{p,t\}(\rho) = 0$ est

$$\rho_0 = (0,0;1,0)$$

qui vérifie

$$\{p,\{p,t\}\}\,(\rho_0) = 1 > 0$$

Les hypothèses (H1), (H2) et (H4) du théorème 1 sont donc vérifiées.

Maintenant, soit $j = e^{2i\pi/3}$ une racine cubique de l'unité. Posons

$$\pi = (0,0;j,1)$$

Nous avons :

$$p(\pi) = j^2 + j + 1 = 0$$

puis, si σ désigne la partie imaginaire de j,

$$\sigma^{-1} \operatorname{Im} \left[p'_t(\pi)\, p'_\tau(\bar{\pi}) + p'_x(\pi)\, p'_\xi(\bar{\pi}) \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} \left[j^3 \, (\overline{j^2 + 2j + 3}) \right] =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{Im} (1-j) = -1 < 0$$

La propriété (5.1) de la proposition 7 est donc violée par P_2.

VII - BIBLIOGRAPHIE

[1] Alinhac S. :

Non unicité pour des opérateurs à caractéristiques simples ,

Séminaire Goulaouic-Schwartz 1979-80, exposé n° IV.

[2] Alinhac S. et Baouendi M.S. :

Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal ,

Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé n° XXII et article à paraître.

[3] Alinhac S. et Baouendi M.S. :

Uniqueness for the characteristic Cauchy problem and strong unique continuation for higher order partial differential inequalities ,

Amer. J. of Maths. 102, 179-217(1980).

[4] Baouendi M.S., Trèves F. et Zachmanoglou E.C. :

Flat solutions and singular solutions of homogeneous linear partial differential equations with analytic coefficients ,

Duke math. J. 46, 409-440 (1979).

[5] Calderón A.P. :

Uniqueness in the Cauchy problem for partial differential equations ,

Amer. J. of Maths. 80 16-36 (1958).

[6] Carleman T. :

Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes ,

Ark. Mat. Astr. Fys. 26 B, n° 17, 1-9 (1939).

[7] Cohen P. :

The non uniqueness of the Cauchy problem ,

O.N.R. Techn. Report 93, Stanford (1960).

[8] Courant R. et Hilbert D. :

Methods of mathematical physics , vol. II (PDE's) ,

Interscience, New-York 1962.

[9] Hörmander L. :

Linear partial differential operators ,

Springer Verlag, Berlin 1963.

[10] Hörmander L. :

Non uniqueness for the Cauchy problem ,

Lecture notes in maths (Springer Verlag) n° 459, Fourier integral operators and PDE's 36-72 (1975).

[11] Pliš A. :

A smooth linear elliptic differential equation without any solution in a sphere ,

Comm. on Pure & Appl. Math. 14, 599-617 (1961).

[12] Trèves F. :

Linear partial differential equations with constant coefficients ,

Gordon and Breach, New-York 1967.

[13] Trèves F. :

Discrete phenomena in uniqueness in the Cauchy problem ,

Proceedings of the Amer. Math. Soc. 46, 229-233 (1974).

N° D'IMPRESSION 509
3ème TRIMESTRE 1981